Lineární algebra I

2. zápočtová písemka, 5. 1. 2009
cvičící: marek sterzik

POZOR: V písemce je jeden drobný chyták!

1. Buď V vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše 3 nad tělesem všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Mějme dány polynomy $P_1, ...P_5$ dané předpisem:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^3 + 4x^2 + 5x + 1 \\ P_2(x) &= x^3 - x + 1 \\ P_3(x) &= 4x^2 + 6x \\ P_4(x) &= 2x^2 \\ P_5(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \end{aligned}$$

   Vyberte z množiny $\{P_1, ..., P_5\}$ bázi podprostoru generovaného těmito polynomy. Jaká je jeho dimenze?

   [15b]

2. Nalezněte souřadnice vektoru $(1, 2, 3) \in \mathbb{Z}_5^3$ vzhledem k bázi $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, kde

$$\begin{aligned} b_1 &= (4, 2, 1) \\ b_2 &= (1, 1, 0) \\ b_3 &= (2, 0, 3) \end{aligned}$$

   [10b]

3. Rozhodněte, které z následujících zobrazení $f, g : \mathbb{Z}_3^5 \to \mathbb{Z}_3^3$ jsou lineárním zobrazením. Svá tvrzení náležitě zdůvodněte. Pro zobrazení, která jsou lineární, nalezněte jejich matici vzhledem ke kanonickým bázím.

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d, e) &= (a + b + c + d + e, a, b + 3) \\ g(a, b, c, d, e) &= (a + b, 2a + b, 3c) \end{aligned}$$

   [15b]

4. Buď U, V vektorové podprostory $\mathbb{R}^4$, takové, že

$$\begin{aligned} U &= [(1, 0, -1, 3), (2, 0, 1, 1), (3, 0, 0, 4)] \\ V &= [(0, 0, -3, 5), (1, 1, 0, 1), (2, -1, 0, 3)]. \end{aligned}$$

   Určete $dim(U \cap V)$. [10b]